Banco de Problemas para el Examen de Admisión
Matemáticas

1- Números complejos

1. Resuelve las siguientes operaciones de números complejos, una vez obtenido el resultado obtén su norma, represéntalo en su forma polar y escribe su complejo conjugado:

$$(2+7i)+(3-4i)$$

$$(9+5i)-(4+7i)$$

$$(5+8i)+(2+9i)$$

$$(6-12i)-(4+3i)$$

$$(3+5i)(-3+2i)$$

$$(3+2i)(1+7i)$$

$$\frac{4+5i}{2-3i}$$

$$\frac{5+2i}{3-5i}$$

2. Resuelve los siguientes ejercicios utilizando la fórmula de Moivre:

$$(1+i)^4$$

$$(\sqrt{3}+i)^6$$

$$(2+2i)^8$$

3. Si z = x + *iy,* con i =$\sqrt{-1}$ obtén la expresión para z^3 - z^2.
4. Dado z = 2 + 3i y u = 1 − i, encuentre las partes reales e imaginarias de:

a) z+u
b) z-u
c) (u)(z)
d) u/z

5. Halla el lugar geométrico de todos los números complejos de la forma $z = \frac{a-i}{1+i}$; con $a \in R$. Encuentra, si existen, los que están sobre la recta x+2y-1=0.

6. Dadas las siguientes funciones reales, resuelve las operaciones indicadas:

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 1$$

$$g(x) = x^4 + 3x^2 + 7$$

$$h(x) = \frac{3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 1}$$

$$i(x) = \frac{x + 1}{x^3 + 2x^2}$$

a) $2f(x) + 3g(x)$
b) $g(x) - 5f(x)$
c) $h(x) \circ g(x)$
d) $g(x) \circ h(x)$
e) $f(x) \circ g(x)$
f) $h(x) * g(x)$
g) $2f(x) * g(x) + g(x)$

7. Conceptualmente se debe tener noción del plano complejo, así como la representación gráfica en coordenadas polares de los números complejos.

8. Entender conceptualmente la exponencial imaginaría, la fórmula de Euler y la identidad de Euler.

9. Conocer el dominio, rango, paridad, periodicidad y gráficas de las funciones trigonométricas.

10. Conocer las propiedades de la función exponencial y logarítmica, así como sus gráficas y el concepto de función inversa.

2- Derivadas

11. Para las siguientes funciones encuentra su domino, rango, máximos, mínimos, asíntotas y paridad:

a) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$

b) $g(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$

c) $h(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

d) $i(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$

e) $j(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$

12. Obtén la serie de Taylor de las funciones:

a) $f(x) = e^x$, alrededor de x = *0*
b) $g(x) = \ln(1 + x)$, alrededor de x = *1*

13. Obtén los tres primeros términos de la serie de McLaurin de las funciones:

a) $f(x) = \ln(1 + x)$
b) $g(x) = \mathrm{sen(x)}$
c) $h(x) = \mathrm{sen}(x^3)$

14. Para las siguientes funciones obtenga sus primeras y segundas derivadas parciales en *x* así como en *y*:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2x - \cos(x) + 4y^3x^5 - 6$
b) $f(x, y) = \frac{4}{3}x^3y - \sqrt{xy} + sen(y) - 2e^x$

15. Una corriente eléctrica, cuando fluye en una bobina circular de radio r, ejerce una fuerza $F = kx(x^2 + r^2)^{-5/2}$ en un imán pequeño ubicado a una distancia *x* sobre el centro de la bobina. Demuestre que *F* es máxima cuando $x = \left(\frac{1}{2}\right)r$.

16. La posición de una partícula en función del tiempo t está dada por la ecuación:

$$x(t) = x_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

donde x_0, v_0 y g son constantes positivas. Determine en que instante alcanza la máxima altura. En ese instante, ¿dónde se encuentra y con que velocidad se mueve?

17. Sabiendo que $v = \frac{dx}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$. La aceleración de una partícula se define mediante la relación a = 0.8v, donde *a* se expresa en in/s^2 y *v* en in/s. Si se sabe que cuando *t*= 0 la velocidad es de 40 in/s, determine *a*) la distancia que recorrerá la partícula antes de quedar en reposo, *b*) el tiempo requerido para que la partícula quede en reposo, *c*) el tiempo requerido para que la velocidad de la partícula se reduzca a 50 por ciento de su valor inicial.

18. Se riega el jardín con una manguera apuntando hacia arriba con un ángulo de inclinación θ, la ecuación que describe el alcancé del agua está dada por:

$$r = \frac{2v^2}{g}(sen\theta)(cos\theta)$$

Con v y g constantes, ¿para qué ángulo es máximo el alcance?

19. Dé la ecuación del plano tangente y de la recta normal al hiperboloide de ecuación $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$ en el punto P=(1,-1,4).

20. Dada la función $f(x) = x^2 + 4y^2 - z^2$, obtener la ecuación del plano tangente y de la recta normal en el punto P=(3,2,5).

21. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la función $f(x) = 2x^2 - 3xy + 8y^2 + 2x - 4y + 4$ en el punto (2,-1).

22. Conceptualmente se debe tener noción de las series, polinomio y residuo de Taylor.

23. Tener claro el concepto de derivada, identificación de puntos críticos de funciones y en base a ello poder obtener una aproximación de la gráfica.

3- Integrales

24. Resuelva las siguientes integrales por el método correspondiente:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\int x\cos(x) dx$$

$$\int ln^2(x) dx$$

$$\int \frac{3}{x^2+3x} dx$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+3} dx$$

$$\int x\sqrt{1+x} dx$$

25. Encontrar el área limitada por $y = x^2$ y $y = x$ entre x=0 y x=2.

26. Encontrar el área de la región entre las curvas $y = sen(x)$ y $y = \cos(x)$ entre x=0 y $x = \frac{\pi}{4}$.

27. Parametrice la curva de la ecuación $(2y + x)^2 = -4\mathrm{y}(2 - \mathrm{x}) - 4(\mathrm{x} + 1)$.

28. Hallar la longitud del arco de la función $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo [0,1].

29. Hallar la longitud del arco de la función $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo [0,1].

30. Hallar la longitud del arco de la función $y = sen(x)$ en el intervalo [0,π].

31. Se debe tener claro el concepto de integral definida e indefinida, así como su relación con la derivada.

32. Identificar porque método realizar las integrales, por ejemplo: cambio de variable, por partes y fracciones parciales.

4- Álgebra Lineal

33. Identificar los elementos de una matriz y un determinante, así como las condiciones para que se puedan llevar a cabo sus operaciones.

34. Dadas las siguientes matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$, complete lo que se pide:

a) $5A - 2B$
b) A^T
c) B^{-1}
d) (A)(B)

35. Dadas las siguientes matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, complete lo que se pide:

a) A^T
b) A^{-1}
c) (A)(B)

36. Encuentre la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

37. El siguiente sistema de ecuaciones homogéneas para los coeficientes c_1 y c_2 establece los posibles niveles de energía de una molécula de hidrogeno mediante la condición de que el sistema tenga soluciones no triviales. Indica para que valores de E ocurre esto.

$ac_1+3c_2 = Ec_1$
$3c_1 + ac_2 = Ec_1$

38. Verifica que los valones E = 0, $\sqrt{\frac{2}{3}}$y $\sqrt{-\frac{2}{3}}$, permiten obtener soluciones no triviales para el sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$3c_2 = Ec1$
$3c_1 + 3c_3 = Ec_2$
$3c_2 = Ec_3$

39. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} x - 2y = 1 \\ x - y + az = 2 \\ ay + 9z = b \end{gathered}$$

¿Para qué valor de *a* el sistema tiene solución única?

40. Use el determinante para encontrar aquellos valores de *k* para los cuales el sistema tiene:
a) Una solución
b) Más de una solución

$$\begin{gathered} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{gathered}$$

41. Verifica que los valones E = 0, $b\sqrt{2}$ y $b\sqrt{-2}$, permiten obtener soluciones no triviales para el sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$bc_2 = Ec_1$
$bc_1 + bc_3 = Ec_2$
$bc_2 = Ec_3$

42. Tener conocimiento de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones: Eliminación de Gauss y Regla de Kramer.

5- Ecuaciones Diferenciales

43. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 500 años. Si una muestra contenía originalmente 5g de dicha sustancia y actualmente solo tiene 4g, ¿Cuál es la edad de la muestra?

44. El contenido radioactivo de un material esta dado por la ecuación

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{c}{\tau}$$

donde τ es la vida media de la sustancia. Resuelve la ecuación para obtener la cantidad de material radioactivo en función del tiempo.

45. Resuelva la ecuación diferencial $x^2 y' + 2xy - x + 1 = 0$.

46. Por derivación implícita obtenga y´ e y´´ en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$.

47. Obtenga la solución general de la siguiente Ecuación -Diferencial Ordinaria de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x$$

48. Encuentre la solución de la ecuación $(2t + 5)dI + 10I dt = 10dt$.

49. Un cuerpo que tiene una temperatura de 70 °F es depositado en un lugar donde la temperatura se mantiene a 40 °F. Después de 3 min, la temperatura del cuerpo ha disminuido a 60 °F.

a) ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 min?

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo tenga 50 °F?

50. Tener los conceptos y conocimiento de las ecuaciones de: Decaimiento radioactivo, oscilador armónico, ley de enfriamiento de Newton y circuitos RLC.